Una formuletta quasi sconosciuta

Gabriele Gelatti
Artista

1. La formula quadratica

Riga vuota altezza 3

La formula è emersa da esplorazioni artistiche sulle "geometrie dei numeri" per la creazione di dipinti matematici: $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = 4\mathrm{AB} + (\mathrm{A}-\mathrm{B})^2$.
La formula è collegata, per via del "teorema di Pitagora", alle classiche formule del "binomio somma" e "binomio differenza" di due quadrati: $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + 2\mathrm{AB}$ e $(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}$.

2. Breve storia della formula

Riga vuota altezza 3

L'apparentemente innocua formula quadratica ci invita a ragionare sul significato che attribuiamo alle cose note, mettendo in questione l'elaborazione del sapere stabilito. Cosa significa capire le cose che conosciamo? Quanti livelli di significato ulteriore si celano tra le istanze inespresse delle cose note?
La "semplice" constatazione che con i multipli di 8 si possono formare i successivi quadrati perfetti sommando agli stessi un altro quadrato perfetto:
$8 + 1^2 = 3^2, 16 + 0 = 4^2, 24 + 1^2 = 5^2, 32 + 2^2 = 6^2, 40 + 3^2 = 7^2$, etc
colpisce la fantasia, spingendo a interrogarsi sulla notorietà o meno di questa proprietà e della sua possibile generalizzazione matematica, che si impone subito allo sguardo per la sua valenza ludico-didattica.
La formula quasi sconosciuta fece una fugace apparizione addirittura negli *Elementi* di Euclide (II,8), rilevata da moderni commentatori quali Enriques (1925), Frajese (1970, Acerbi (2007) come una delle rare proposizioni che non trovano un'ulteriore applicazione negli *Elementi*. Euclide stesso la applicò in *Data 86*, in possibile relazione con la trattazione perduta sulle "coniche". La formula è stata anche vista come una possibile spiegazione della originaria scoperta del teorema di Pitagora in relazione con la prima terna pitagorica primitiva 3,4,5 (Zeuthen, 1905) Queste primeve manipolazioni sui quadrati con le loro interconnessioni, e in particolare le antiche conoscenze sullo gnomone di accrescimento del quadrato (Zellini, 2023) manifestano istanze che sembrano elementari ma sono dense di significati e relazioni.
La presente ricerca, con la presentazione di un diagramma geometrico indicativo per la crescita del quadrato attraverso uno "gnomone a cornice" mostra come la formula euclidea della proposizione II,8 ("suddivisone a caso di una linea") trovi un suo limite inverso nella "suddivisione della linea in estrema e media ragione" della proposizione XIII,3, ovvero la suddivisione per eccellenza di un segmento (che infatti i greci chiamavano solo τομέ. ovvero "sezione").

3. Patterns di quadrati perfetti con la “suddivisione a caso di una linea”

Riga vuota altezza 3

Sostituendo A e B con i numeri naturali positivi possiamo creare innumerevoli patterns di quadrati scomposti in atri quadrati. Nel breve spazio dell’articolo, proponiamo solo un doppio diagramma (Figura 1) per il quadrato di 7 (49), anche con valore di dimostrazione visiva. Per sottolineare la densità dei significati possibili in questa analogia geometrico-numerica segnaliamo l’apparizione congiunta delle due terne primitive 3,4,5 e 7,24,25, ed inoltre che la sovrapposizione delle due figure è foriera di semplici ma significativi rapporti di *sezione aurea* che purtroppo non è qui possibile esplicitare.

4. La *sezione aurea* come caso speciale della formula

Riga vuota altezza 3

Avendo osservato il numero 5 come misura lineare, si veda ora il quadrato con area 5. Se, per puro caso, dividessimo il segmento $\sqrt{5}$ in due parti diseguali (Figura 2) con la parte più piccola uguale a $\sqrt{5}/4 - 1/2 =$ φ, e la più grande $1/\varphi = \Phi$, applicando la formuletta quasi sconosciuta alla figura (valevole come dimostrazione), vediamo che, se il quadrato di area 5 risulta composto da un quadrato unitario e 4 rettangoli di area 1, allora il suo lato è stato diviso in proporzione $\varphi * \Phi = 1$.

Per un ulteriore trattazione dello “gnomone a cornice” e la *sezione aurea* che genera i numeri dispari della decade, si rimanda alla pubblicazione in poster per XXXV IcM, (2021), Gelatti, G. *La sezione aurea e i quadrati dispari della decade*.

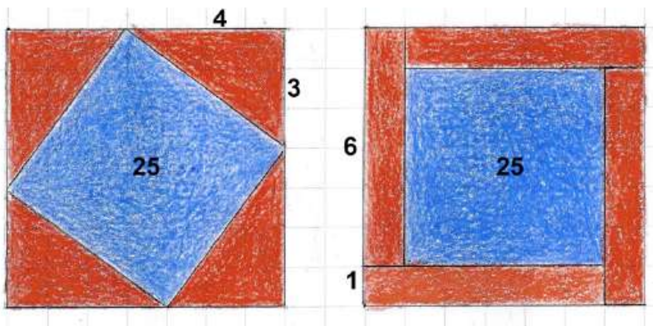

Figura 1: divisione di 7 in 3,4, e 6,1.

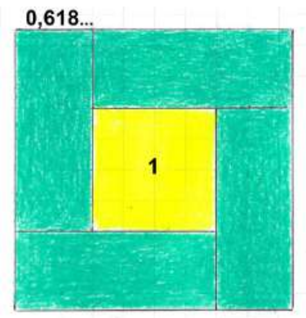

Figura 2: sezione aurea.

Bibliografia (

Frajese, A., a cura di, (1970). Euclide, Elementi. UTET.

Enriques, F. (1925). Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna. Libri I-IV. Stock.

Acerbi, F., a cura di, (2007). Euclide, Tutte le Opere. Bompiani.

Zeuthen, H.-G. (1905). “Théorème de Pythagore”, Origine de la Géométrie Scientifique”, pp.833-54. Congrès Internationale de la Philosophie, II.

Zellini, P. (2023). Il Teorema di Pitagora. Adelphi.