Incontri con la Matematica 35

La sezione aurea e i quadrati dispari della decade

Gabriele Gelatti, artista

Abstract.

La ricerca presenta, in forma visiva tra arte e matematica, un'inedita costruzione geometrica che, dal quadrato iniziale e con la sezione aurea, genera la crescita di una **cornice gnomonica**. La semplice costruzione individua tutti i quadrati con area = n dispari della decade (1, 3, 5, 7, 9) manifestando interessanti aspetti del numero aureo, insieme al nesso tangibile tra le proprietà numeriche e le figure geometriche.

I concetti trattati (gnomone, trasformazione delle aree, sezione aurea e incommensurabilità) e le possibili dimostrazioni degli assunti con mezzi elementari (teorema di Pitagora e di Talete sulle parallele), unitamente all'impossibilità di individuare nella figura altri quadrati con area = n interi oltre i dispari della decade (e il loro ovvio raddoppio geometrico, cioè i numeri pari) mettono la ricerca di "nuove" immagini auree in misteriosa relazione con idee anche filosofiche della matematica antica (come l'importanza dei numeri dispari e della decade nelle tracce del pensiero pitagorico), stimolando un'indagine sulla storia delle idee che è oggetto di un prossimo articolo.

L'invenzione e il contributo dell'artista-matematico, novello filosofo della natura, è quella di osservare e descrivere forme e storie nuove da enti anche notissimi nella loro antichità, creando imprevisti collegamenti che possono illuminare il processo non lineare di trasmissione delle conoscenze e della ricerca della bellezza visiva e mentale.

Filolao, decade e gnomone.

"Bisogna esaminare i compimenti e la sostanza del numero in rapporto alla potenza che è nel dieci. Perché grande è, e perfettissima e onnipotente e principio e guida della vita divina e celeste e di quella umana, la natura del numero, partecipando della potenza del dieci. Senza di essa tutte le cose sarebbero illimitate e oscure e incomprensibili. [...] Nulla sarebbe comprensibile, né le cose in sé nè le loro relazioni, se non ci fossero il numero e la sua sostanza. Ma questo, armonizzando nell'anima tutte le cose con la percezione, rende conoscibili esse e le loro relazioni secondo la natura dello gnomone, col dar corpo e col distinguere i rapporti delle cose, sia nell'infinito che nel finito."

Il frammento del pitagorico Filolao qui riportato si adatta con precisione all'ente matematico della nostra ricerca, anche in merito alla percezione delle proporzioni e conseguente formazione di figure distinguibili su "scala umana". Questo aspetto è particolarmente significativo per l'artista che osserva i rapporti percepibili con i sensi nei confini della decade (emblema filosofico di una matematica della Natura), nelle cui relazioni interne tra enti numerici finiti si cela l'infinito.

Definizioni.

Usiamo convenzionalmente la lettera greca "phi" minuscola e maiuscola(φ e Φ) per indicare i valori del rapporto aureo, di cui illustriamo alcune proprietà utili ad apprezzare il racconto:

$$\varphi = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} = \varphi + 1$$

Tra le innumerevoli proprietà e definizioni del numero aureo troviamo utile anche:

$$\varphi^2 = 1 - \varphi$$

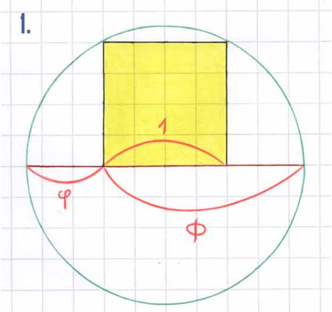
$$\Phi^2 = 1 + \Phi$$

$$\varphi^m = \varphi^{m-2} - \varphi^{m-1}$$

$$\Phi^m = \Phi^{m-2} + \Phi^{m-1}$$

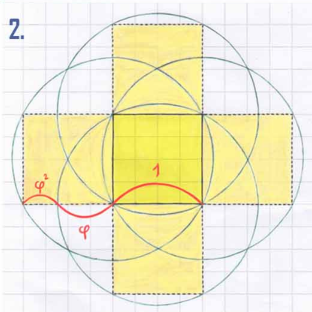
$$\varphi^m \times \Phi^m = 1$$

1.

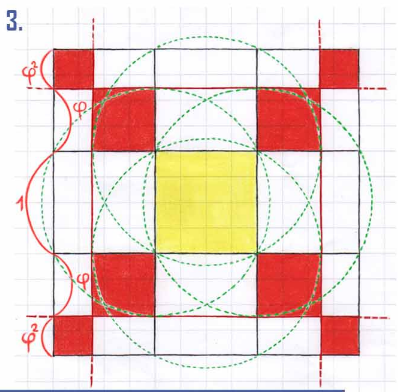


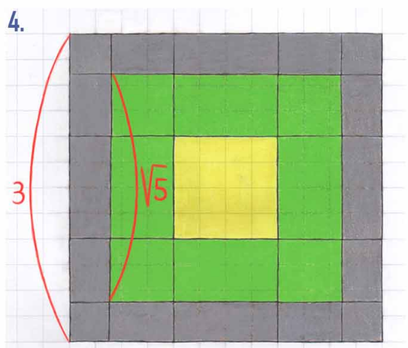
La nota costruzione geometrica della sezione aurea, già presente in Euclide II, 11 e sviluppata da Erone e Tolomeo, può essere vista anche così: costruire sul diametro di un cerchio un quadrato con gli opposti vertici giacenti sulla circonferenza. La base del quadrato così inserito suddivide automaticamente il diametro in sezione aurea.

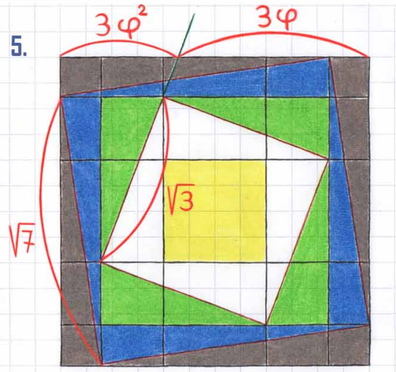
2.



Ripetendo la costruzione sui 4 lati del quadrato unitario, costruiamo i 4 quadrati simili adiacenti, i cui lati sono tagliati in sezione aurea dai cerchi di costruzione.







3.

Completiamo il perimetro del quadrato ora composto da 9 quadrati unitari e tracciamo i segmenti passanti per i punti di sezione aurea già individuati dai cerchi di costruzione.

La figura risultante suddivide il quadrato di area 9 in: quadrati tra loro in proporzione aurea e in due tipi di rettangoli aurei, con rapporto tra i lati rispettivamente φ e φ^2.

4.

Consideriamo il quadrato di area 9 così suddiviso come il risultato della crescita del quadrato unitario centrale per mezzo di una cornice gnomonica con due anelli successivi individuati dalla suddivisione aurea di 1 (ovvero φ e $1 - \varphi = \varphi^2$).

Il primo anello di crescita ha area 4 e così anche il successivo, per cui le rispettive aree dei quadrati verde e grigio valgono 5 e 9.

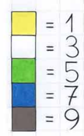
5.

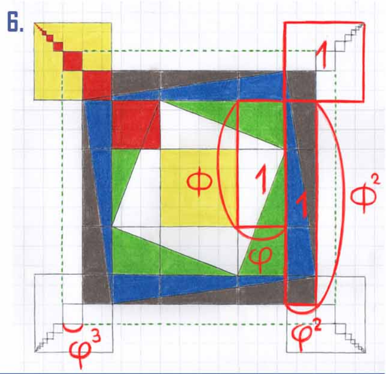
Costruiamo, congiungendo i punti di intersezione aurea già descritti nel quadrato di area 9, due ulteriori quadrati (bianco e blu) aventi rispettivamente area 3 e 7.

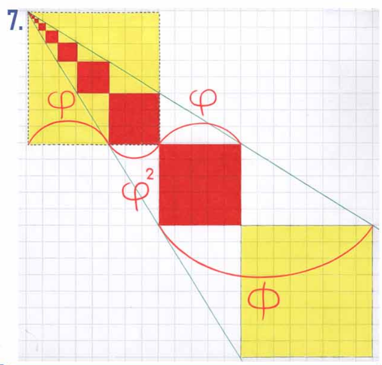
Nella suddivisione del quadrato di area 9, abbiamo costruito tutti i quadrati di area = n dispari successivi della decade.

Osserviamo che la proiezione del lato del quadrato di area = 3 taglia in sezione aurea il lato del quadrato di area = 9.

Valori cromatici - numerici = aree dei quadrati descritti:







6.

I quadrati e i rettangoli aurei già descritti in **3**. sono componibili in nuovi rettangoli aurei con lati in rapporto φ^2 e φ^3 e aventi area = 1.

L'area del quadrato più esterno possibile, individuato dalla massima **cornice gnomonica** del limite geometrico delle infinite potenze di φ (come descritto in **7**.), vale il doppio di 9 meno un quadratino di lato φ^3, ovvero = 18 - φ^6

7.

Anche le successive infinite potenze di φ sono racchiudibili in un quadrato di area 1, per cui φ più le sue successive potenze = Φ

ovvero: $$\lim_{m \to \infty} \sum_{1}^{m} \varphi^m = \Phi$$

Problemi aperti

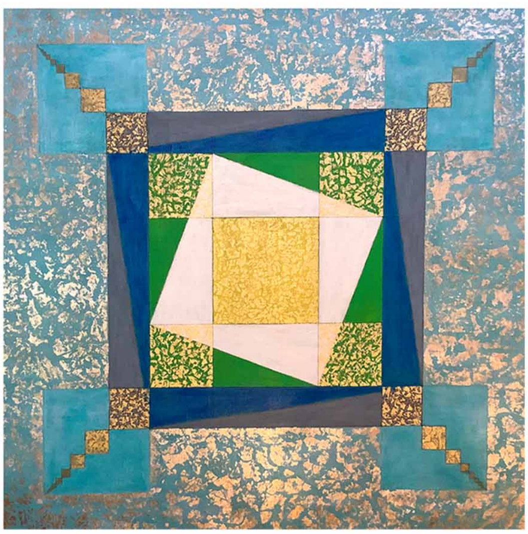
1) È possibile costruire geometricamente il rettangolo aureo con rapporto tra i lati = φ e area = 1? I suoi lati misurano $\sqrt{\varphi}$ e $\sqrt{\Phi}$ ...
2) È possibile calcolare le aree dei quadrati indicati dalle successive "cornici gnomoniche" delle potenze di phi come numeri interi e differenze di potenze auree?
3) Come dimostrare che non sono inseribili altri quadrati con area = n interi dopo 9 nella crescita del quadrato tramite la "cornice gnomonica" definita dalle successive potenze di φ ?

Riferimenti bibliografici

Euclide, Elementi; Herz-Fischler, A mathematical history of the golden number ; Maddalena, I Pitagorici; Zellini, Gnomon; Gelatti, Connecting the odd squares of the decade by a golden ratio whirl, Aplimat Conference 2015.

Ringraziamenti

Paesaggista ed Educatore Delia Pastorino per la grafica
Il Prof. Bruno D'Amore per l'amorevole pazienza
La mia amata famiglia a cui dedico tutti i miei lavori



Microcosmo, dipinto su tela (encausto a olio e metalli nobili, cm 100 x 100)